



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ  
„ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ  
КОСОГО ИЗГИБА“**

1988

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

Харьковский ордена Ленина авиационный институт  
им. Н.Е. Жуковского

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ  
"ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ КОСОГО ИЗГИБА"

Харьков ХАН 1980

Утверждены методической комиссией факультета № I  
22 мая 1986 года (протокол № 7)

Составитель Л.В. Литовский

Цель работы - исследовать поведение балки в условиях косоугольного изгиба, определить теоретически и опытным путем величину и направление прогиба свободного конца консоли при косоугольном изгибе, а также напряжения в характерных точках некоторого сечения и сравнить полученные результаты.

## I. Общие положения

При выполнении лабораторной работы следует иметь в виду, что косоугольный изгиб реализуется в случае нагружения балки силами и моментами в плоскости, не совпадающей ни с одной из плоскостей симметрии балки, но проходящей через ее геометрическую ось.

При таком нагружении направление прогибов не совпадает с плоскостью приложения сил (силовой плоскостью), этот изгиб получил название "косоугольный".

Косоугольный изгиб - это сложный вид деформации, так как в поперечных сечениях возникает два изгибающих момента  $M_y$  и  $M_z$  относительно главных центральных осей инерции сечения.

Прогибы и напряжения в сечениях балки определяются с помощью принципа суперпозиции, т.е. рассматриваются суммы решений от двух плоских изгибов, вызванных действием изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$ , что допустимо для материалов, подчиняющихся закону Гука.

## 2. Схема испытательной установки.

Для исследования косоугольного изгиба следует выбрать схему консоли балки, нагружаемой на свободном конце внешней сосредоточенной силой (рис. 1).

Балка 4 относительно корпуса 2 установки может поворачиваться вокруг своей продольной оси на любой угол, фиксируется с помощью болтов 3. При этом плоскость действия внешней силы (грузов 6) меняет свое положение относительно главных центральных осей инерции сечения  $Y$  и  $Z$ . При  $\alpha = 0$  реализуется плоский изгиб только моментом  $M_y$ , а при  $\alpha = \pm 90^\circ$  - моментом  $M_z$ . При углах  $\alpha$  в диапазоне от 0 до  $\pm 90^\circ$  балка находится в условиях косоугольного изгиба под действием двух моментов  $M_y$  и  $M_z$ .

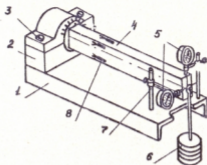


Рис. 1. Установка для исследования косо́го изгиба: 1 - основание; 2 - корпус; 3 - болты; 4 - балка; 5 - индикаторы; 6 - грузы; 7 - стойки; 8 - тензодатчики

### 3. Определение прогибов и напряжений

Прогиб конца консольной балки можно вычислить по известной формуле [1]

$$f = \frac{\Delta P \cdot L^3}{3E J_{н.о.}}, \quad (1)$$

где  $\Delta P$  - действующая на конце консоли сила;

$L$  - длина консоли;

$J_{н.о.}$  - момент инерции сечения относительно нейтральной оси.

В случае косо́го изгиба можно вычислить составляющие прогиба вдоль координатных осей  $Y, Z$  сечения по формулам

$$f_y = \frac{\Delta P_y \cdot L^3}{3E J_z}, \quad f_z = \frac{\Delta P_z \cdot L^3}{3E J_y}, \quad (2)$$

где  $\Delta P_y, \Delta P_z$  - составляющие силы  $\Delta P$  вдоль осей  $Y, Z$  сечения

$$\Delta P_y = \Delta P \cdot \sin \alpha; \quad \Delta P_z = \Delta P \cdot \cos \alpha. \quad (3)$$

Окончательно для вычисления прогибов

$$f_y = \frac{\Delta P L^3 \sin \alpha}{3EJ_z}; \quad f_z = \frac{\Delta P \cdot L^3 \cos \alpha}{3EJ_y}. \quad (4)$$

Полное перемещение конца консоли  $f$  и его направление по отклонению, например, к оси  $Z$  сечения (рис.2) можно определить по формулам

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}; \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f_y}{f_z}. \quad (6)$$

для прямоугольного сечения с размерами  $b \times h$  на основании (4)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{J_y}{J_z} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{h}{b}\right)^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

Анализ формулы (7) показывает, что для сечений, у которых  $J_y \neq J_z$ ,  $\varphi \neq \alpha$ . В частности, при  $J_y > J_z$  угол  $\varphi > \alpha$ , т.е. направление полного прогиба не совпадает с силовой плоскостью.

Экспериментально прогибы  $f_y$  и  $f_z$  можно измерять с помощью измерителей линейных перемещений, например, с помощью индикаторов часового типа, установив два таких индикатора на конце консоли вдоль направлений осей  $Y_0$  и  $Z_0$  установки (рис.3).

Изчеренные индикаторами перемещения  $f_{y_0}$  и  $f_{z_0}$  несколько больше прогибов  $f_y$  и  $f_z$  вдоль осей сечения:

$$f_y = f_{y_0} \cdot \cos \alpha; \quad f_z = f_{z_0} \cdot \cos \alpha. \quad (8)$$



Рис. 2. Схема перемещений

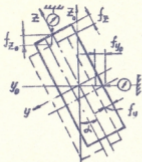


Рис. 3. Схема измерения прогибов

Теоретическое значение напряжений в любой точке сечения с координатами  $Y, Z$  при любом изгибе согласно принципу суперпозиции или накладывают, суммируя напряжения от изгибающих моментов  $M_y, M_z$  (рис. 4)

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} \cdot z + \frac{M_z}{J_z} \cdot y, \quad (9)$$

где  $J_y, J_z$  - осевые моменты инерции сечения.

При нагружении балки силой  $\Delta P$  в сечении на расстоянии  $l$  от места приложения силы изгибающие моменты равны

$$M_y = \Delta P l \cos \alpha; \quad M_z = \Delta P l \sin \alpha, \quad (10)$$

где  $\alpha$  - угол, образованный силовой плоскостью и осью сечения.

Напряжения, определяемые формулой (9), распределяются по сечению согласно линейному закону, достигая наибольшей величины в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, т.е. от оси сечения, где напряжения равны нулю.

Положение нейтральной оси можно найти из уравнения (9), полагая  $\sigma = 0$ . Уравнение нейтральной оси имеет вид

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{z}{y} = - \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \alpha. \quad (11)$$

Для сечений, у которых  $J_y > J_z$ , угол  $\beta$  по модулю больше угла  $\alpha$ .

Положение нейтральной оси (н.о.) показано на рис. 4. Для прямоугольного сечения опасными оказываются две угловые точки А и В, для которых координаты  $Y$  и  $Z$  одновременно максимальны.

Напряжения в точках А и В разные и отличаются только знаком. Так, для точки А на основании формул (9), (10)

$$\sigma_{\max}^A = \Delta P \cdot \ell \left( \frac{\cos \alpha'}{W_y} + \frac{\sin \alpha'}{W_z} \right) \quad (12)$$

или с учетом того, что осевые моменты сопротивления прямоугольного сечения  $W_y$  и  $W_z$  равны

$$W_y = \frac{bh^2}{6}; \quad W_z = \frac{hb^2}{6},$$

получим

$$\sigma_{\max}^A = \frac{6 \Delta P \cdot \ell}{bh^2} \left( \cos \alpha' + \frac{h}{b} \sin \alpha' \right). \quad (13)$$

Экспериментально напряжения можно найти, например, методом тензометрирования [2].

Нагрузку балки целесообразно проводить ступенчато, прикладывая несколько раз последовательно равные грузы  $\Delta P$ . Осреднение экспериментальных результатов по всем измерениям позволяет получить более точные результаты.

Максимально допустимое значение нагрузки можно определить из условия, что в самом невыгодном варианте нагружения

$$\sigma_{\max} < [\sigma] = \frac{\sigma_T}{K}. \quad (14)$$

#### 4. Порядок проведения работы

Перед началом испытаний ознакомиться с устройством установки, способом измерения перемещений, напряжений и расчетных зависимостями для их вычислений.

Ознакомиться с бланком лабораторной работы, записать исходные данные:

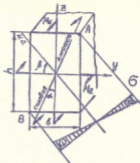


Рис. 4. Косой изгиб прямого сечения



Закрепить балку в корпусе так, чтобы ось симметрии сечения совпала с линией действия нагрузки  $\Delta P$  (т.е. с обе стороны  $\alpha = 0$  или  $90^\circ$ ) и, нагружая балку, убедиться, что она изгибается в плоскости действия сил, т.е. изгиб является плоским.

Изменить закрепление балки, обеспечив угол  $\alpha$  в диапазоне  $0 < \alpha < 90^\circ$ .

Оценить величину  $P_{\max}$ .

Установить гиревой подвес и проверить установку индикаторов на ноль. Включить измеритель деформаций и записатьточные показания по всем тензодатчикам.

Положить плавно без перекосов на гиревой подвес груз  $\Delta P$ .

Написать показания индикаторов в бланк лабораторной работы, а также показания измерителя деформаций по всем датчикам.

Повторить нагружение несколько раз, следя за тем, чтобы нагрузка не превышала допустимой для выбранного угла  $\alpha$  величины. При каждом нагружении записывать показания измерителей прогибов и деформаций.

Произвести разгрузку и проверить возвращение показаний всех приборов в первоначальное положение. Правильные результаты будут получены только в том случае, если при разгрузке показания индикаторов и измерителя деформаций совпадут с первоначальными. В противном случае проверить правильность закрепления балки и индикаторов.

Обработать экспериментальные данные в соответствии с разработанной формой бланка лабораторной работы.

Вычислять теоретические значения прогибов и напряжений, заполнить соответствующие графи бланка. Сравнить результаты, сделать самостоятельно выводы по проделанной работе.

### 5. Контрольные вопросы

1. При каком нагружении бруса возникает плоский изгиб?
2. При каком нагружении бруса возникает косой изгиб?
3. В чем состоит принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции) при косом или кривом изгибе?
4. При каких условиях применим принцип суперпозиции?

5. Для каких форм поперечных сечений балок невозможен косой изгиб?
6. Как направлен суммарный прогиб центра тяжести сечения балки по отношению к силовой плоскости?
7. Как влияет угол  $\alpha$ , характеризующий направление силовой плоскости, на направление прогибов при косом изгибе?
8. По какому закону распределяются напряжения по произвольному сечению при косом изгибе?
9. Что такое нейтральная ось сечения при косом изгибе и как найти ее положение?
10. Как определить максимально допустимую нагрузку для балки в условиях косого изгиба?

#### Список рекомендуемой литературы

1. Сопротивление материалов /Под ред. Г.С.Писаренко. 5-е изд., перераб. и доп. Киев, 1986.
2. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений: Справочное пособие. Киев, 1981.

Леонид Всеволодович Литовский

Методические указания к лабораторной работе  
" Экспериментальное изучение кривого изгиба "

Редактор Н.М. Сивульская

Подписано в печать 17.03.88

Формат 60x84/1/16. Тум. офс. 2. Офс. печ.

Усл. печ. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,52. Т. 20 экз. Заказ 106. Бесплатно

Харьковский авиационный институт

310191, Харьков-191, ул. Чкалова, 17

Реглапринт типографии ХАИ

310191, Харьков-191, ул. Чкалова, 17

